

А.Я. Григоренко¹, Е.Н. Плиска²,
Г.В. Сороченко², Н.Н. Тормахов¹

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА
ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В БИОМЕХАНИКЕ**

¹ *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: metod@inmech.kiev.ua*

² *Национальный медицинский университет им. А.А. Богомольца,
просп. Победы, 34, 03057, Киев, Украина; e-mail: plyska.e@gmail.com*

Abstract. On the basis of finite element method, the modeling the stress-strain state of the crown of a tooth with a carious cavity is carried out in the case of influence of vertical force. It was supposed that the tooth crown is a two-layered cylinder consisting of the outer enamel and inner dentin layers. An effect of location and geometrical parameters of the caries cavity as well as the mechanical properties of enamel and dentin on the carrying capacity of the dental crown is studied. It is shown that an increase in the length and depth of the carious cavity leads to an increase in the intensity of stresses in the crown layers. The maximal stress intensity in this case occurs in the enamel layer near the walls of the carious cavity when it is located near the neck of the tooth.

Key words: stress-strain state, FEM, 3D theory, two-layer cylinder, caries.

Введение.

Зуб человека условно разделяют на коронку и корень. Коронка зуба располагается вне костных тканей верхней и нижней челюстей и состоит из наружного эмалевого и внутреннего дентинного слоев. Эмаль является хрупким, износостойким материалом с высоким модулем упругости, а дентин обладает пористой структурой и имеет меньший, по сравнению с эмалью, модуль упругости. В центральной части коронки располагаются мягкие ткани – нервные волокна и кровеносные сосуды, по которым передается информация о нагрузках на зуб и осуществляются обменные процессы в тканях коронки зуба [1].

Одним из наиболее распространенных заболеваний зубов является кариес, причиной которого является скопление микроорганизмов на поверхности коронки. Микроорганизмы вырабатывают из простых сахаров кислоты и внеклеточные полисахариды. Кислоты вызывают деминерализацию эмали с образованием в ней полостей, а внеклеточные полисахариды генерируют биопленки, которые ограничивают доступ ротовой жидкости к пораженным кариесом местам коронки [6, 8].

В процессе откусывания и пережевывания пищи зубы испытывают значительные (до 200 Н) нагрузки [1]. Наличие кариесной полости ослабляет несущую способность коронки зуба и может привести к его разрушению. В последнее время в стоматологии все шире внедряются новые методики лечения. При этом оценка эффективности этих методик выполняется не методом проб и ошибок, как это было ранее, а на основе моделирования биомеханических процессов, происходящих в зубочелюстном аппарате пациента [2 – 5, 10 – 13]. Применение моделирования позволяет лучше исследовать процессы, происходящие в тканях зуба, и выработать более эффективные методики лечения пациентов.

В работе [4] предложена математическая модель напряженно-деформированного состояния коронковой части зуба с повреждением, вызванным кариесом. Принято также, что коронковая часть зуба имеет форму цилиндра с кариозной полостью, ограниченной цилиндрическими координатами по высоте, глубине и окружной координате, а зуб состоит из упругих слоев эмали и дентина.

Математическое моделирование выполнено с привлечением конечных элементов (МКЭ) и показало значительный рост напряжений в области кариозной полости, которая может приводить к появлению микротрещин и разрушению коронки зуба.

В данной работе проведено исследование влияния конфигурации кариесной полости и упругих свойств эмали дентина на прочностные свойства коронки зуба.

Цель данной работы состоит в исследовании влияния места расположения и геометрических параметров кариесной полости, а также механических свойств эмали и дентина на несущую способность зубной коронки.

1. Методика определения напряженно-деформированного состояния.

Исследуем НДС коронки зуба, пораженного кариесом. Представим коронку зуба в виде двухслойного цилиндра, защемленного на одном торце и имеющего прямоугольную полость, вызванную кариесом (см. рис. 1).

1 – эмаль, 2 – дентин, 3 – кариесная полость. Предполагаем, что наружный слой коронки зуба состоит из эмали, а внутренний – из дентина. Кариесная полость расположена на расстоянии l_1 от места защемления коронки, имеет высоту l и глубину r . Коронковая часть зуба обладает плоскостью симметрии, что позволяет исследовать напряженное состояние половины коронки, отсеченной плоскостью симметрии. Наличие повреждения зуба обуславливает необходимость применения пространственной декартовой системы координат – x, y, z .

НДС кусочно-однородного тела, которое занимает ограниченную область $\Omega \in \mathbf{R}^3$ ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$) с непрерывной по Липшицу границей $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$, описывается уравнениями линейной теории упругости [4].

На границе Γ_σ действует система внешних поверхностных сил, которые представлены компонентами вектора поверхностного нагружения $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$. На окклюзионную поверхность коронки зуба действует вертикальная нагрузка p_y . На границе Γ_u задается вектор перемещений $\vec{u}_\Gamma = (u_x^\Gamma, u_y^\Gamma, u_z^\Gamma)$.

Решение краевой задачи должно удовлетворять:

уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}^i}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}^i}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$(x, y, z) \in \Omega_i, \quad (i = 1, 2);$$

геометрическим соотношениям Коши:

$$\vec{\varepsilon}^i = \mathbf{B}^i \vec{u}^i \quad (x, y, z) \in \Omega_i, \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

и закону Гука:

$$\vec{\sigma}^i = \mathbf{D}^i \vec{\varepsilon}^i \quad (x, y, z) \in \Omega_i, \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

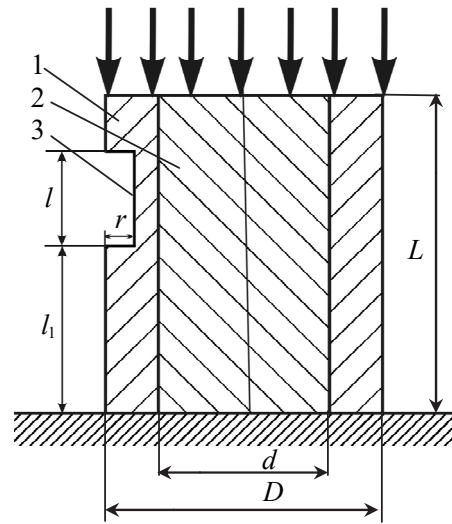


Рис. 1

Система уравнений (1) – (3) для всех подобластей Ω_i дополняется: статическими граничными условиями:

$$\sigma_{nx} = p_x; \sigma_{ny} = p_y; \sigma_{nz} = p_z \quad (x, y, z) \in \Gamma_\sigma; \quad (4)$$

кинематическими граничными условиями:

$$u_x = u_x^\Gamma; u_y = u_y^\Gamma; u_z = u_z^\Gamma \quad (x, y, z) \in \Gamma_u \quad (5)$$

и условиями сопряжения подобластей Ω_i (условиями идеального механического контакта):

$$\sigma_{nx}^i = \sigma_{nx}^j; \sigma_{ny}^i = \sigma_{ny}^j; \sigma_{nz}^i = \sigma_{nz}^j \quad (i, j = 1, 2, i \neq j); \quad (6)$$

$$u_x^i = u_x^j; u_y^i = u_y^j; u_z^i = u_z^j \quad (i, j = 1, 2, i \neq j), \quad (7)$$

где

$$\sigma_{nx}^i = \sigma_{xx}^i \cos(\vec{n}, x) + \sigma_{xy}^i \cos(\vec{n}, y) + \sigma_{xz}^i \cos(\vec{n}, z);$$

$$\sigma_{ny}^i = \sigma_{xy}^i \cos(\vec{n}, x) + \sigma_{yy}^i \cos(\vec{n}, y) + \sigma_{yz}^i \cos(\vec{n}, z);$$

$$\sigma_{nz}^i = \sigma_{xz}^i \cos(\vec{n}, x) + \sigma_{yz}^i \cos(\vec{n}, y) + \sigma_{zz}^i \cos(\vec{n}, z);$$

\vec{n} – единичный вектор внешней нормали к границе области Ω_i .

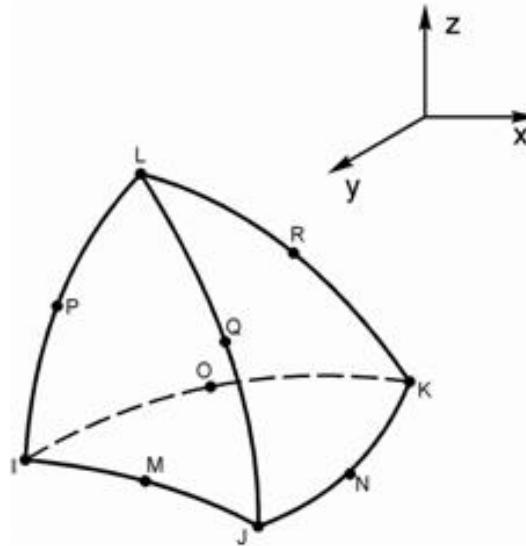


Рис. 2

Для решения поставленной задачи используем метод конечных элементов. Поставленную задачу формулируем в вариационной постановке следующим образом. Необходимо определить функцию $\vec{u} \in V \equiv \{\vec{v} \in W_2^{(1)}(\Omega) \mid \vec{v} = 0 \text{ на } \Gamma_u\}$, на которой достигается минимум функционала Лагранжа

$$I(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (B^i u^i)^T D^i B^i u^i d\Omega_i - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} p^T u^i d\Omega_i. \quad (8)$$

Решением системы (1) – (7) или (8) является поле перемещений, деформаций и напряжений. Оценку прочности рассматриваемых конструктивных элементов проводим согласно критерию Мизеса:

$$\sigma_M = \sqrt{0,5 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}. \quad (9)$$

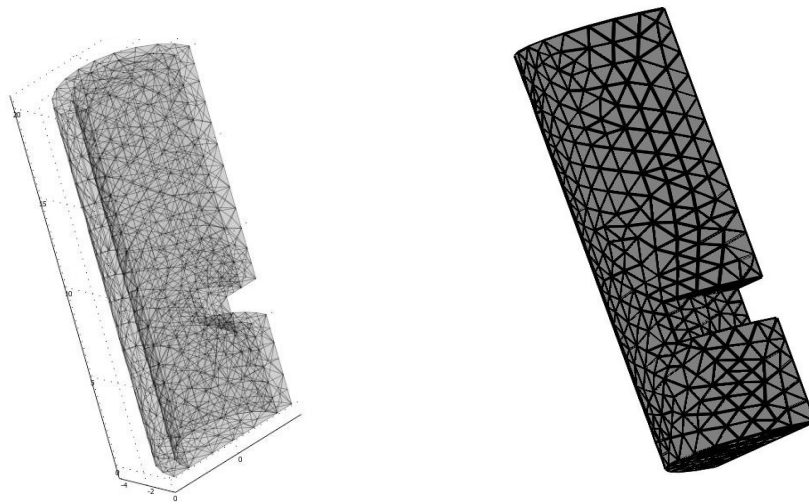


Рис. 3

Реализация МКЭ проведена с использованием пакета программ Femlab, а именно COMSOL Multiphysics 3.5. Область Ω была разбита на конечные элементы (КЭ) тетраэдральной формы (рис. 2). На рис. 3 представлено сетку разбития коронковой части зуба на конечные элементы.

2. Напряженно-деформированное состояние коронковой части зуба с кариесной полостью.

Для оценки влияния размеров кариесной полости и места ее расположения на НДС коронки зуба, были рассмотрены пять, представленных в табл. 1, конфигураций коронковой части зуба.

Таблица 1

№	Конфигурация	Размеры конфигурации коронковой части, мм		
		l_1	l	r
1	K5205	5	2	0,5
2	K522	5	2	2
3	K0205	0	2	0,5
4	K2505	2	5	0,5
5	K0505	0	5	0,5

На первом этапе был проведен выбор необходимого количества конечных элементов, на которые следует разбивать исследуемую область. Коронка с кариесной полостью в конфигурации K5205 была разбита на 3296, 13184 и 52736 КЭ. Результаты расчета интенсивности напряжений для указанных количеств конечных элементов практически совпали. Это позволило сделать вывод о достаточности 3296 КЭ для расчета напряжений в окрестности полости. Все последующие расчеты НДС выполнены при указанном количестве КЭ.

Ниже приведены результаты расчета НДС коронковой части зуба с кариесной полостью, состоящей только из эмали. Расчеты проведены для конфигурации коронки K5205. На рис. 4 показаны графики относительной интенсивности напряжений σ_M , отнесенной к вертикальной нагрузке на зуб p_y , в зависимости от координаты y для коронок зуба: 1 – без кариесной полости и 2 – с кариесной полостью.

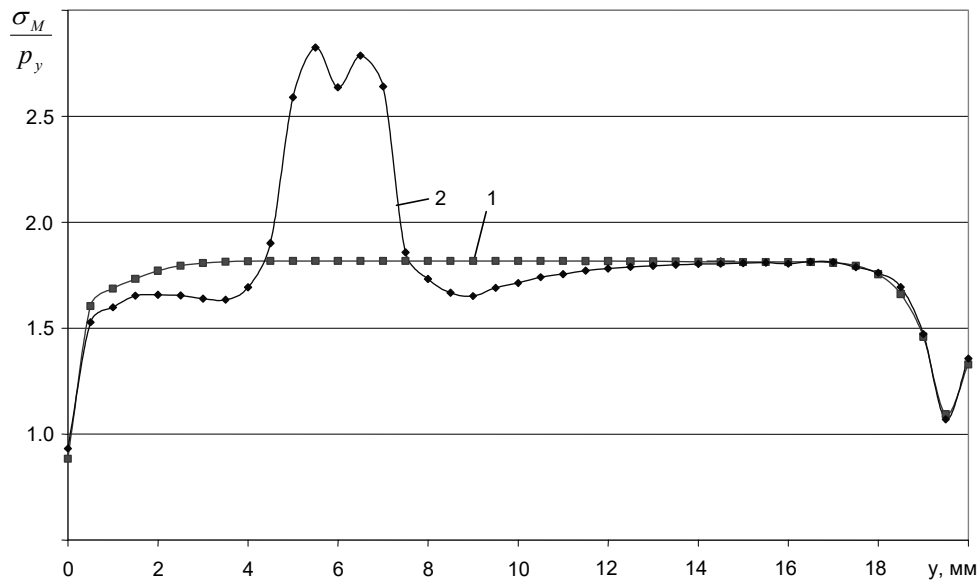


Рис. 4

Интенсивность напряжений в коронке в конфигурации K5205 была максимальной у стенок полости в точке с координатами: $x = -3,4$ мм, $y = 5$ мм, $z = 0,1$ мм. Максимальная относительная интенсивность напряжений в этой конфигурации равна 2,78, что в два раза превышает величину интенсивности напряжений в коронке без кариесной полости.

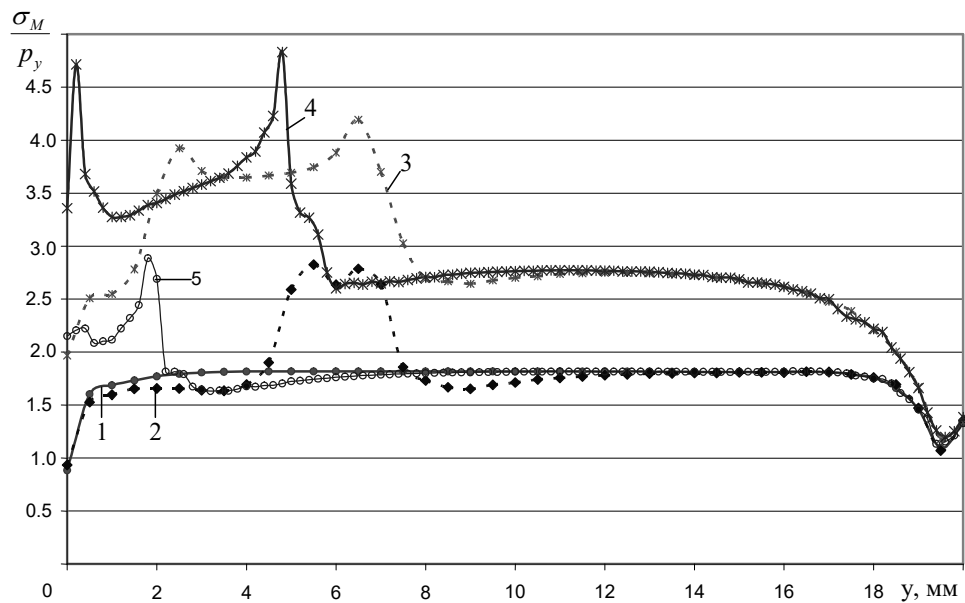


Рис. 5

На рис. 5 приведены данные расчетов относительной интенсивности напряжений в коронке зуба для разных конфигураций коронки: 1 – для коронки без полости, 2 – K5205, 3 – K2505, 4 – K0505, 5 – K0205. Из этого рисунка видно, что относительная интенсивность напряжений в конфигурациях K5205 и K0205, в которых длина кариесной полости $l = 2$ мм, была меньше, чем в конфигурациях K2505 и K0505. Увеличе-

ние длины полости с 2 до 5 мм приводит к повышению интенсивности напряжений в среднем на 59 %. Сравнение интенсивности напряжений для конфигураций K0205, K0505, в которых полости расположены в месте защемления коронки у шейки зуба, с интенсивностью напряжений для конфигураций K5205, K2505, где полости расположены в средней части коронки, показывает, что в первом случае интенсивность напряжений в среднем на 9,5 % выше, чем во втором. Из этого можно сделать вывод, что при расположении кариесной полости у шейки зуба опасность разрушения коронки будет выше, чем в случае расположения полости в ее средней части.

Механические свойства твердых тканей зуба не постоянны и варьируют в зависимости от состояния здоровья, гигиены полости рта, степени поражения твердых тканей зуба кариесом, возраста и других факторов. Под воздействием агрессивной среды в полости рта происходит деминерализация эмали и дентина, которая сопровождается увеличением в них микропор и снижением механических свойств. Поражение зуба кариесом снижает микротвердость эмали на 30 – 40%. Согласно [7, 9] модули упругости эмали E_e и дентина E_d могут изменяться, соответственно, в пределах 70...115 и 14...28 ГПа.

В работе исследовано влияние соотношения между модулями упругости дентина и эмали на величину интенсивности напряжений в окрестности кариесной полости. Расчеты проведены для конфигурации коронки K5205.

На рис. 6 для конфигурации коронки K5205 приведены значения интенсивности напряжений в эмали зуба, отнесенной к поверхностной нагрузке p_y для следующих соотношений модулей упругости эмали и дентина: 1 – $E_e/E_d = 1$; 2 – $E_e/E_d = 3$; 3 – $E_e/E_d = 5$; 4 – $E_e/E_d = 8$. При равенстве модулей упругости эмали и дентина интенсивность напряжений в окрестности кариесной полости превышала нагрузку на окклюзионную поверхность коронки на 49 %. С увеличением отношения E_e/E_d интенсивность напряжений в эмали возрастала. При соотношении модулей упругости $E_e/E_d = 8$ максимальная интенсивность напряжений в окрестности кариесной полости в три раза превышала поверхностную нагрузку на зуб.

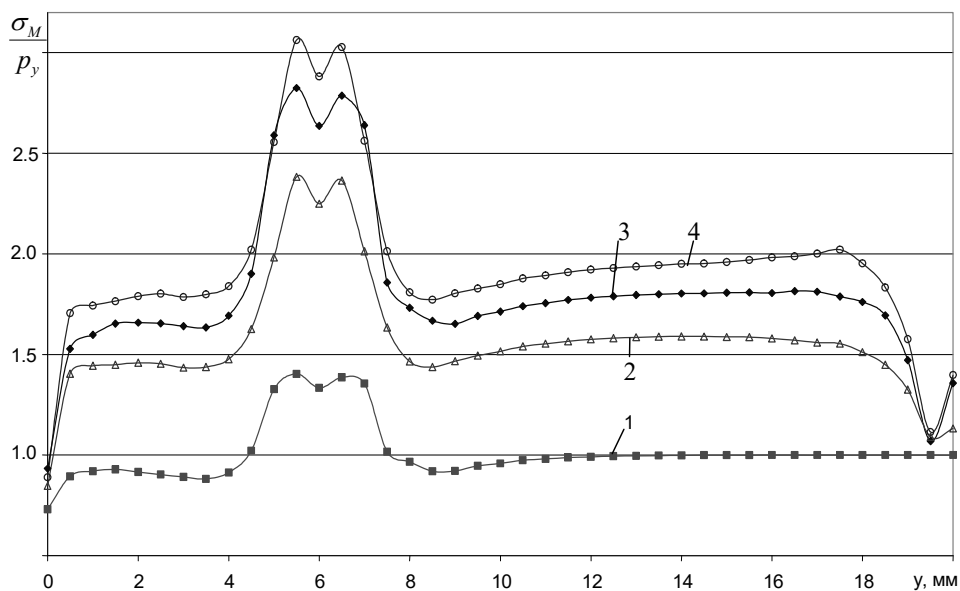


Рис. 6

Исследовано также влияние глубины кариесной полости на напряженное состояние коронки зуба. На рис. 7 приведены результаты расчета относительной интенсивности напряжений.

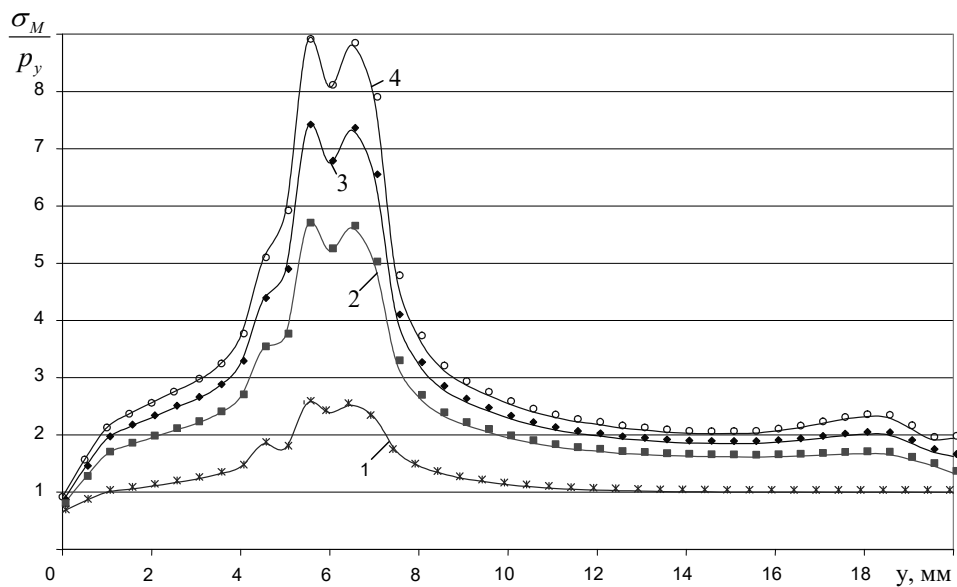


Рис. 7

ности напряжений для конфигурации коронки K522 при глубине кариесной полости $r=2$ мм для различных соотношений упругих свойств эмали и дентина: 1 – $E_e/E_d = 1$; 2 – $E_e/E_d = 3$; 3 – $E_e/E_d = 5$; 4 – $E_e/E_d = 8$. Сравнение результатов расчетов для конфигураций K5205 и K522, изображенных на рис. 6 и 7, показывает, что увеличение глубины кариесной полости приводит к увеличению интенсивности напряжений. Интенсивность напряжения для конфигурации K522 при равных модулях упругости эмали и дентина в области кариесной полости превышает поверхностную нагрузку на 160 %, а при соотношении модулей упругости эмали и дентина $E_e/E_d = 8$ интенсивность напряжений превышает поверхностную нагрузку на коронку зуба в девять раз.

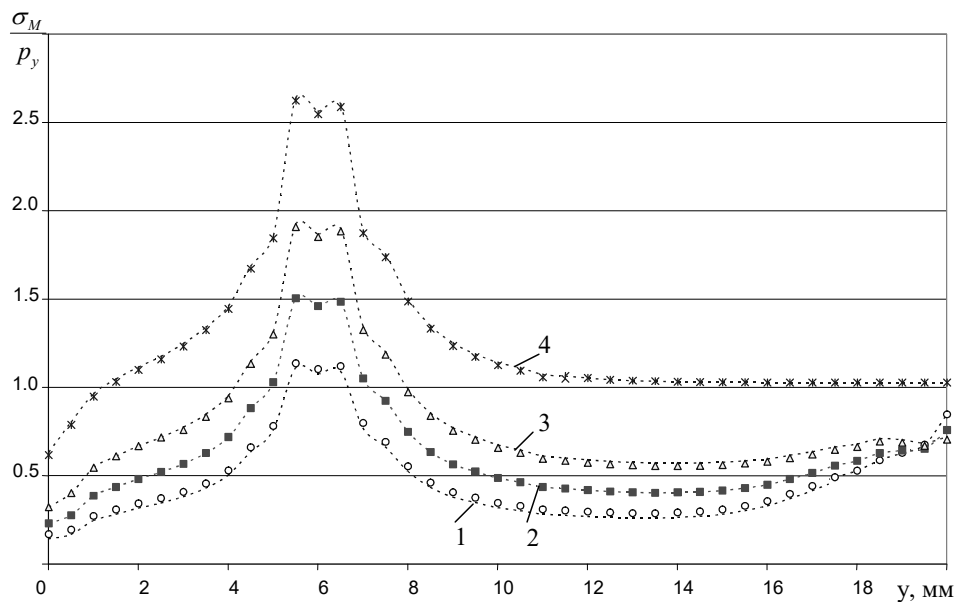


Рис. 8

Результаты приведенных выше расчетов характеризуют интенсивность напряжений в эмали зуба. На рис. 8 представлены результаты расчетов интенсивности напряжений для конфигурации K522, которые возникают в дентине коронки зуба и для различных соотношений упругих свойств эмали и дентина: $1 - E_e/E_d = 1$; $2 - E_e/E_d = 3$; $3 - E_e/E_d = 5$; $4 - E_e/E_d = 8$. Видно, что интенсивность напряжений в дентине зуба значительно ниже, чем в эмали, и для большей части коронки – меньше внешней нагрузки на окклюзионную поверхность коронки. Это свидетельствует о том, что основную нагрузку имеет наружный эмалевый слой коронки. Интенсивность напряжений превышает поверхностную нагрузку p_y только в окрестности кариесной полости.

Таблица 2

E_e/E_d	1	2	4	8
Эмаль	2,65	5,91	7,91	9,55
Дентин	2,61	1,93	1,46	1,10

При $E_e/E_d = 1$ интенсивность напряжений в окрестности кариесной полости близка к интенсивности напряжений в эмалевом слое коронки и превышает p_y на 61 %, а при $E_e/E_d = 8$ интенсивность напряжений в дентине почти в девять раз меньше напряжений в эмали и всего на 10 % превышает поверхностную нагрузку. В табл. 2 приведены величины относительной интенсивности напряжений σ_M/p_y в области кариесной полости, отнесенные к поверхностной нагрузке p_y для эмали и дентина.

Выводы.

1. Увеличение функциональной нагрузки, ослабление по ряду причин структуры и механических свойств эмали и дентина коронковой части зуба с развитием кариеса может привести к отлому, микротрещинам и полному разрушению коронки зуба.

2. Анализ расчета напряженного состояния пораженной кариесом коронки зуба показал, что увеличение длины и глубины кариесной полости в коронке зуба приводит к значительному повышению интенсивности напряжений как в эмалевом, так и в дентинном слоях коронки зуба. Максимальная интенсивность напряжений при этом возникает у стенок кариесной полости у шейки зуба.

3. Механические свойства твердых тканей зуба зависят от многих факторов: от общего состояния здоровья пациента и гигиены его полости рта. Соотношение между модулями упругости дентина и эмали влияет на распределение напряжений в слоях коронки зуба. Эмаль имеет более высокий модуль упругости и несет основную часть внешней нагрузки. При отношении модулей упругости эмали и дентина равном восьми, интенсивность напряжений в слое эмали (при глубине кариесной полости равной 2 мм) превышала поверхностную нагрузку на зуб в девять раз. При этом интенсивность напряжений в слое дентина превышала поверхностную нагрузку всего на 10 %. При равенстве модулей упругости эмали и дентина интенсивности напряжений в этих слоях коронки зуба были примерно одинаковы.

4. Применение математического моделирования на основе метода конечных элементов с использованием пакета программ Femlab позволяет получить количественные оценки влияния места расположения и геометрических параметров кариесной полости, а также влияния механических свойств эмали и дентина на несущую способность зубной коронки.

5. Полученные данные позволяют лучше понимать механизмы влияния наличия размеров и места расположения кариесной полости на напряженно-деформированное состояние коронки зуба в условиях поражения ее кариесом и более точно разработать план эффективного лечения этого заболевания.

РЕЗЮМЕ. На основі методу скінченних елементів проведено моделювання напружено-деформованого стану коронки зуба з карієсною порожниною під впливом вертикального зусилля. Коронка зуба є двошаровим циліндром, що складається з зовнішнього емалевого і внутрішнього дентинного шарів. Проведено дослідження впливу місця розташування і геометричних параметрів карієсної порожнини, а також механічних властивостей емалі та дентину на здатність зубної коронки витримувати навантаження. Показано, що збільшення довжини і глибини карієсної порожнини в коронці зуба приводить до підвищення інтенсивності напружень в шарах коронки. Максимальна інтенсивність напружень при цьому виникає в емалевому шарі коло стінки карієсних порожнин, що знаходяться біля шийки зуба.

1. Бетельман А.И. Ортопедическая стоматология. – М.: Медицина, 1965. – 404 с.
2. Григоренко О.Я., Джарбує М.М., Дорошенко С.И., Тормахов Н.Н., Фліс П.С. Моделирование процесса расширения зубных дуг на основе ортодонтического устройства, оснащенного упругим элементом // Доп. НАН України. – 1999. – № 2. – С. 74 – 78.
3. Григоренко О.Я., Дорошенко С.И., Жачко Н.І., Тормахов Н.Н., Фліс П.С. Моделивання процесу повороту зуба при апаратурному лікуванні // Доп. НАН України. – 1999. – № 2. – С. 74 – 78.
4. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Копытко М.Ф., Москаленко А.Н., Хоменко Л.А. Математическое моделирование функциональной нагрузки при поражении твердых тканей зуба кариесом // Доп. НАН України. – 2011. – № 8. – С. 177 – 182.
5. Григоренко Я.М., Неспрядько В.П., Лось В.В., Григоренко А.Я. Планирование протезирования на внутрикостных имплантатах на основе изучения напряженно-деформационного состояния костной ткани челюстей // Современная стоматология. – 2004. – № 4. – С. 122 – 129.
6. Земнова Е.Г., Заславская М.И., Салина Е.В., Рассанов С.П. Микрофлора полости рта: норма и патология. – Нижний Новгород: НГМА, 2004. – 156 с.
7. Зырянов Б.Н., Онлоев П.А., Онлоев А.П. Микротвердость зубных тканей в патогенезе кариеса зубов у населения Крайнего Севера // Новое в стоматологии. – 2001. – № 10. – С. 94 – 95.
8. Леонтьев В.К., Кисельникова Л.П. Детская терапевтическая стоматология. Национальное руководство. – М.: ГЭОТАР-МЕДИА, 2010. – 890с.
9. Логинова Н.К., Колесник А.Г., Бартнев В.С. Физиология эмали и дентина // Стоматология. – 2006. – **85**, № 4. – С. 60 – 68.
10. Flis P., Grigorenko A., Doroshenko N., Tormakhov N., Filonenko V. Mechanics and Mathematical Modeling of Class Treatment with Orthodontic Appliances With a Movable Ramp // EUREKA: Health Sciences. – 2016. – № 3 (83). – P. 3 – 11.

Поступила 29.05.2017

Утверждена в печать 30.01.2018